Ακολουθίες (και Σειρές) συναρτήσεων (ομοιόμορφη σύγκλιση)

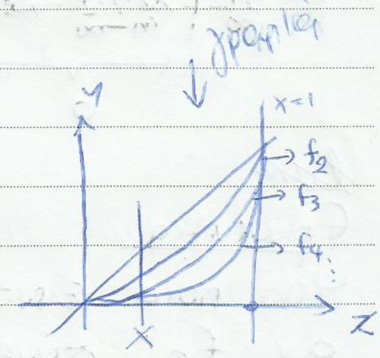
<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Λέμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ λέμε ότι συγκλίνει κατά σημείο $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ στη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ αν $\forall x \in E$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

<u>Πχ1</u>

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ όπου $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



Δηλαδή $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι οι $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς ενώ το κατά σημείο όριο $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$

Επίσης:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1} f_n(x)\right) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 1}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right), \quad \forall x \in [0,1)$$

<u>Πχ2</u>

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{x}}$, $\quad f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n'(x) = \sqrt{x} \cdot \cos(nx)$ και $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

ενώ $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ δεν υπάρχει $\forall x \in \mathbb{R}$ δηλ. $\neq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Δηλαδή $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x) \neq \dfrac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Παράδειγμα 3 (Ηθικό δίδαγμα στα προηγούμενα)

Έστω η διπλή ακολουθία

$$S_{m,n} = \frac{m}{m+n}, \quad m,n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{m\to\infty}\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} S_{m,n}\right)}_{0} = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\lim_{m\to\infty} S_{m,n}\right)}_{1}$$

~~Είναι~~

Ερώτημα

Υπό ποια έννοια σύγκλισης ακολουθίας ισχύει πχ αν f_n συνεχείς, τότε το όριο (με αυτή τη σύγκλιση) είναι συνεχές

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f ($f_n \overset{n\to\infty}{\underset{u}{\longrightarrow}} f$ ομοιόμορφα) αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0) : \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

$f_n \to f$ κατά σημείο $\Leftrightarrow (\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0)$ ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

$f_n \to f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f_n \to f$ κατά σημείο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$f_n \underset{n\to\infty}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$ ομοιόμορφα $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall a \in \{|f_n(x) - f(x)| \,/\, x \in E\} \Rightarrow (a < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|}_{=:\|f_n - f\|_\infty} \leq \varepsilon$$

$$=: \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

Αρα, όταν ψάχναμε να δούμε εαν μια f_n συγκλίνει ομοιόμορφα, εξετάζαμε:

1) εαν f_n συγκλίνει κατά σημείο
2) $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ $\left(\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0 \right)$

<u>Παράδειγμα 4</u>
Εξετάστε εαν η ακολουθία $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$
$f_n(x) = x(1-x)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.
<u>ΛΥΣΗ</u>

1) $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & , x=0 \\ 0 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \in 1 \end{cases}$ ~> δηλ $f_n(x) \to f(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$

Αρα $f_n \to 0$ κατά σημείο

2) ΘΔΟ $f_n \xrightarrow{u} f$ ομοιόμορφα $\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$
$\Leftrightarrow \sup_{x\in[0,1]} \{ |f_n(x) - \cancel{f(x)}^{0}| \} \to 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \to 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \max_{x\in[0,1]} f_n(x) \to 0$

Αρκεί νβ το μέγιστο σημείο της $f_n(x)$.

$f_n'(x) = (1-x)^n - n(1-x)^{n-1} \cdot x = (1-x)^n - n(1-x)^n \frac{1}{1-x} \cdot x$
$= (1-x)^n \left(1 + n \frac{1}{1-x} \cdot x \right)$

$f_n'(x) = 0 \Rightarrow (1-x)^n = 0$ ή $\left(1 - n \frac{1}{1-x} \cdot x\right) = 0$

$\boxed{x=1}$ ή $\left(1 - \frac{nx}{1-x}\right) = 0$

Απορ.

$1 - x - nx = 0$

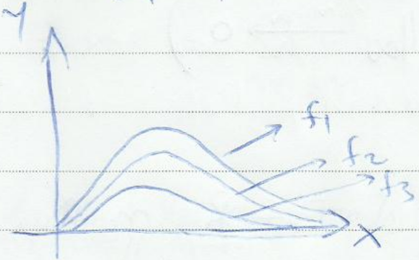
$1 - x(+1+n) = 0$

όπου $f_n''\left(\frac{1}{n+1}\right) < 0$ ~> $\longleftarrow$ $\boxed{x = \frac{1}{n+1}}$

~> $\max\{ f_n(x) : x \in [0,1] \} =$
$= f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right)^n}_{e^{-1}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Άρα, $f_n \to 0 = f$ ομοιόμορφη σύγκλιση



ΓΡΑΦΙΚΑ